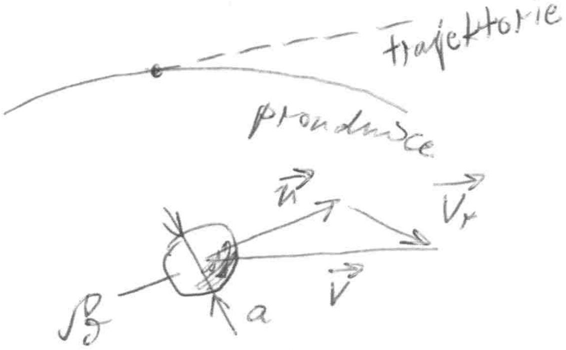
3. Pohybové vlastnosti částic

- pohyb individuální částice v proudu plynu – výsledek působení sil na částici
- síly – hmotnostní
  - povrchové
- převládající síla, která způsobuje pohyb částice ⇒ odlučovací princip

3.1 Pohybová rovnice částice

setrvačné síly působící na částici jsou v rovnováze s ostatními působícími silami (2. Newtonův zákon)



$$\vec{V_r} = \vec{V} - \vec{u}$$

vektor relativní rychlosti obtékání částice

Setrvačnost částice $\vec{F_1}$

$$\vec{F_1} = M_\sigma \frac{d\vec{u}}{dt}$$

Setrvačná síla přidružené hmotnosti $\vec{F_2}$

ve vazkém prostředí – spolu s částicí se pohybuje i určitý objem plynu $V_p \doteq \frac{1}{2} V_\sigma$

$$M_p = V_p \cdot \rho$$

$$\vec{F_2} = M_p \frac{d(\vec{u} - \vec{V})}{dt} = \frac{\pi a^3}{12} \rho \left(\frac{d\vec{u}}{dt} - \frac{d\vec{V}}{dt} \right)$$

Aerodynamický odpor částice $\vec{F}_r$

$$\vec{F}_r = \xi \frac{\pi a^2}{4} \frac{|\vec{v}-\vec{u}|(\vec{v}-\vec{u})}{2} \rho$$

Vztlaková síla $\vec{F}_v$

tam, kde je částice v prostředí se změnou tlaku

$\vec{F}_v = - V_c \vec{\nabla} p$ $\vec{\nabla} p$ – gradient tlaku – vektor se směrem a smyslem největšího nárůstu tlaku

Pohybová rovnice částice

$$\vec{F}_1 + \vec{F}_2 = \vec{F}_r + \vec{F}_v + \vec{F}_e$$

$$\frac{\pi a^3}{6} \rho_c \frac{d\vec{u}}{dt} + \frac{\pi a^3}{12} \rho \left(\frac{d\vec{u}}{dt} - \frac{d\vec{v}}{dt} \right) = \xi \frac{\pi a^2}{4} \frac{|\vec{v}-\vec{u}|(\vec{v}-\vec{u})}{2} \rho - \frac{\pi a^3}{6} \vec{\nabla} p + \vec{F}_e$$

Aerodynamický odpor částice $\vec{F}_r$

při pohybu částice v činné prostředí, tam kde existuje $\vec{v}_r$

$\vec{F}_r = \xi \frac{\pi a^2}{4} \frac{|\vec{v}_r| \vec{v}_r}{2} \rho$ směr a smysl rychl. $\vec{v}_r$

Vyjádření součinitele odporu ξ

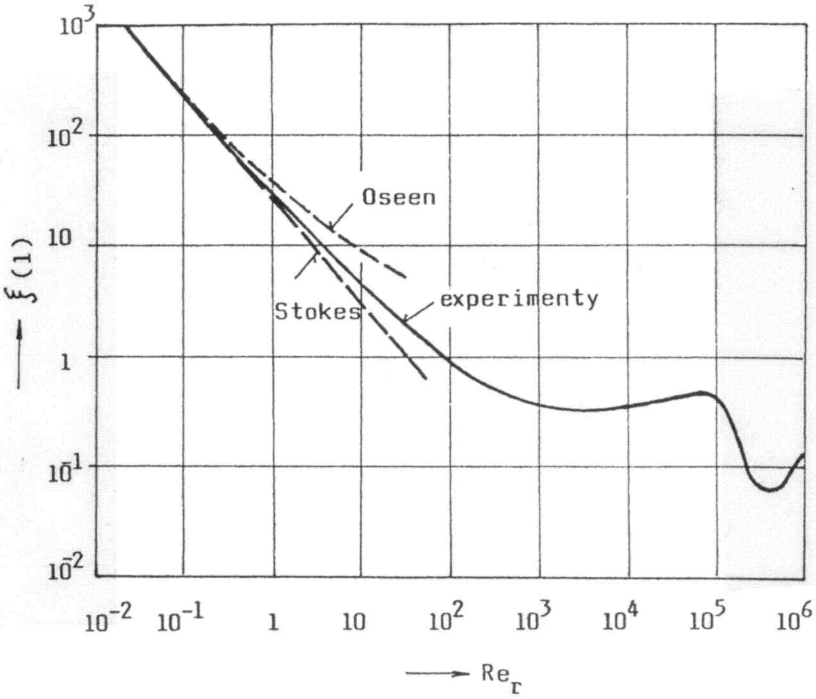
využití teor. řešení i experimentu Stokese

teor. řešení vazkého laminárního obtékání koule s podmínkou, že tekutina na povrchu částice lpí

$\xi = \frac{24}{Re_r}$ Stokesův zákon

Porovnání teorie a experimentu

platnost Stokesova z. se prakticky omezuje hodnotou $Re_r < 0{,}2$



Oseen: korekce pro oblast $Re_r < 1$

$$\xi = \frac{24}{Re_r}\left(1 + \frac{3}{16} Re_r\right)$$

Klyačko: aproximační vztah pro oblast $Re_r \in (0{,}2 ; 400)$

$$\xi = \frac{24}{Re_r}\left(1 + \frac{1}{6} Re_r^{2/3}\right)$$

V oblasti platnosti Stokesova zákona:

$$\vec{F}_\tau = \frac{24}{Re_r} \frac{\pi a^2}{4} \frac{|\vec{v}_r| \vec{v}_r}{2} \rho = \frac{24 \eta}{|\vec{v}_r| a \rho} \frac{\pi a^2}{4} \frac{|\vec{v}_r| \vec{v}_r}{2} \rho = 3 \pi \eta a \vec{v}_r$$

Nekulové (izometrické) částice

v oblasti platnosti Stokesova z.

$$\vec{F}_\tau = 3 \pi \eta a \vec{v}_r \cdot \varkappa_V$$

a_V ... ekvivalentní velikost částice dle objemu

$\varkappa_V$ ... dynamický součinitel tvaru

$$\varkappa_V \approx \frac{1}{\psi^{1/2}}$$

$$\psi = \left(\frac{a_V}{a_S}\right)^2 \quad \text{sféricita částice}$$

Aerodynamický odpor částice, jejíž rozměr a je srovnatelný s l_m

$l_m \doteq 0{,}065\ \mu m$ při standardních podm.

srovnatelné hodnoty – u malých částic při standardních podm. nebo při nízkém tlaku u větších částic (l_m je větší) je-li $l_m \approx a$, plynné prostředí nelze vzhledem k částici považovat za kontinuum a plyn při obtékání částice již na povrchu částice nelpí $\Rightarrow$ obtékání se skluzem $\Rightarrow$

$\Rightarrow$ menší F_τ (většinou v oblasti platnosti Stokesova z.)

$$\vec{F}_\tau = 3\pi\eta a \vec{v}_r \frac{1}{C} \qquad C = 1 + K_c \frac{l_m}{a}$$

$$K_c \doteq 2{,}7$$

$$\vec{F}_\tau = 3\pi\eta a \vec{v}_r \frac{1}{1 + 2{,}7\frac{l_m}{a}}$$

3.2. Řešení základních případů pohybu částice

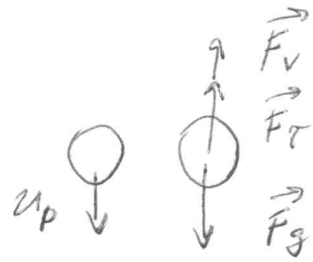
3.2.1 Přímočarý rovnoměrný pohyb

nejjednodušší případ, např. ustálený rovnoměrný pohyb v klidném prostředí, vyvolaný např. gravitační silou

= sedimentace částic $\quad \vec{v} = 0 \quad \vec{u} = \vec{u}_p \Rightarrow \vec{v}_r = \vec{v} - \vec{u} = -\vec{u} = -\vec{u}_p$

rovnoměrný pohyb $\Rightarrow$ zrychlení je nulové

pohybová rce částice



$$0 = \vec{F}_\tau + \vec{F}_v + \vec{F}_g$$

$$\vec{F}_\tau = \xi \frac{\pi a^2}{4} \frac{|\vec{v}_r|\vec{v}_r}{2}\rho = -\xi \frac{\pi a^2}{4} \frac{|\vec{u}_p|\vec{u}_p}{2}\rho$$

$$\vec{F}_v = -V_{\check{c}} \vec{\nabla} p = (\vec{\nabla} p = \rho\vec{g}) = -V_{\check{c}}\rho\vec{g}$$

$$\vec{F}_g = V_{\check{c}} \rho_{\check{c}} \vec{g}$$

působení ve vertikálním směru $\rightarrow$ skalární forma rce

$$F_g = F_\tau + F_v \qquad F_\tau = F_g - F_v$$

$$u_p = \sqrt{\frac{4a(\rho_s-\rho)g}{3\xi\rho}}$$

v oblasti platnosti Stokesova zákona ($Re_r < 0{,}2$)

$$\vec{F}_\tau = -3\pi\eta a \vec{u}_p \qquad u_p = \frac{a^2(\rho_s-\rho)g}{18\eta}$$

Problematika obecného vztahu stanovení u_p

$$u_p = \sqrt{\frac{4a(\rho_s-\rho)g}{3\xi\rho}} \Rightarrow u_p = f(\xi), \text{ ale } \xi = f(Re_r) \text{ a } Re_r = f(u_p)$$

řešení iterací na základě znalosti vztahu $\xi = f(Re_r)$

řešení pomocí komplexu veličin

1) stanovení u_p, je-li známo a, ρ_s, ρ, η

komplex $\xi \cdot Re_r^2$

vztah $\xi \cdot Re_r^2 - Re_r \Rightarrow Re_r \Rightarrow u_p$

2) stanovení a, je-li známo u_p, ρ_s, ρ, η

komplex ξ / Re_r

vztah $\xi / Re_r - Re_r \Rightarrow Re_r \Rightarrow a$

u_p pro nekulové (izometrické) částice

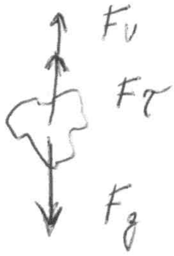
kulová částice $u_p = \frac{a^2(\rho_s-\rho)g}{18\eta}$

$$a = \sqrt{\frac{u_p \cdot 18\eta}{(\rho_s-\rho)g}}$$

ekvivalentní velikost částice dle pádové rychlosti a

u_p - pádová rychl. skutečné částice

nekulová částice v oblasti platnosti Stokesova z.



$$3\pi\eta a_v u_p \varkappa_v = \frac{\pi a_v^3}{6}(\rho_s-\rho)g$$

$$u_p = \frac{a_v^2(\rho_s-\rho)g}{18\eta\varkappa_v}$$

$$\varkappa_v = \left(\frac{a_v}{a}\right)^2$$ dynamický součinitel tvaru

3.2.2 Pohyblivost částice B (s/kg)

$$B = \frac{\text{konečná rychlost částice v klidném prostředí}}{\text{vnější síla, která pohyb vyvolala}} = \frac{\vec{u}_k}{\vec{F}_e}$$

pro případ sedimentace

$$F_g \doteq F_\tau \qquad B = \frac{u_p}{F_g} \doteq \frac{u_p}{F_\tau}$$

$$B = \frac{1}{3\pi\eta a} \quad (s/kg)$$

malé částice - korekce na skluz

$$B = \frac{1+K_e\frac{l_m}{a}}{3\pi\eta a}$$

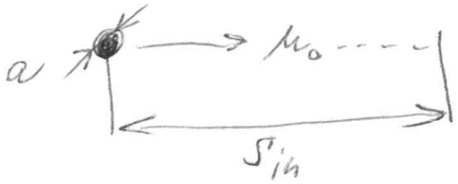
3.2.3 Přímočarý nerovnoměrný pohyb

řešení vychází z obecné pohybové rovnice částice

obecné řešení složité → řešení zvláštních případů

Pohyb částice ve vodorovném směru v klidném prostředí s počáteční rychlostí částice u_0 - řešení setrvačného doběhu částice S_{in}

$v = 0$



ve vodorovném směru:

$$F_1 + \cancel{F_2} = F_\tau \qquad (F_g, F_v \text{ působí } \perp)$$

$$\frac{\pi a^3}{6}\rho_\sigma \frac{d\vec{u}}{dt} = -\xi \frac{\pi a^2}{4}\frac{u^2}{2}\rho$$

$\vec{F}_\tau \sim \vec{v}_r \sim -\vec{u}$

$$\frac{\pi a^3}{6}\rho_\sigma \frac{du}{dt} = -3\pi\eta a u_p$$

(při platnosti Stokesova zákona)

$$\frac{a^2\rho_\sigma}{18\eta}\frac{du}{dt} = -u \qquad \Big| \cdot \frac{1}{3\pi\eta a}$$

$$\tau_\sigma \frac{du}{dt} = -u$$

τ_σ (s) doba relaxace částice

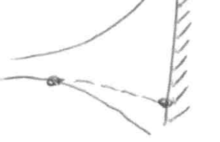
řešení separací proměnných, počáteční podm.: $t = 0$, $u = u_0$

3.2.4 Křivočarý pohyb částice

– obecný případ pohybu částice, např.

– při obtékání válce

– při obtékání překážky



trajektorie ≠ proudnice

– řešení vychází z obecné pohyb. rce.

$$\vec{F}_1 + \cancel{\vec{F}_2} = \vec{F}_\tau + \vec{F}_v + \vec{F}_e$$

$$\vec{F}_\tau = 3\pi\eta a \vec{v}_r \left(1 + \frac{1}{6} Re_r^{2/3}\right) \qquad \text{(Klyachko)}$$

$$\frac{\pi a^3}{6}\rho_\sigma \frac{d\vec{u}}{dt} = 3\pi\eta a (\vec{v} - \vec{u})\left(1 + \frac{1}{6} Re_r^{2/3}\right) - \frac{\pi a^3}{6}\vec{\nabla} p + \vec{F}_e \qquad \Big| \cdot \frac{1}{3\pi\eta a}$$

$$\tau_\sigma \frac{d\vec{u}}{dt} = (\vec{v} - \vec{u})\left(1 + \frac{1}{6} Re_r^{2/3}\right) - \underbrace{\frac{a^2}{18\eta}}_{= \frac{\tau_\sigma}{\rho_\sigma}} \vec{\nabla} p + \vec{F}_e B$$

a) nejjednodušší případ pohybu

$$\tau_S \frac{d\vec{u}}{dt} = \vec{V} - \vec{u}$$

malé Re_r, zanedbáme $\vec{F}_v$ a $\vec{F}_e$

b) pohyb částice v gravitačním silovém poli

$$\underbrace{-\frac{a^2}{18\eta}\rho\vec{g} + \frac{\pi a^3}{6}\rho_S\vec{g}\,\frac{1}{3\pi\eta a}}_{\text{úprava posledních 2 členů pohybové rovnice}} = \frac{a^2(\rho_S-\rho)\vec{g}}{18\eta} = \vec{u}_p$$

malé Re_r, $\nabla p = \rho\vec{g}$, $\vec{F}_e = \vec{F}_g$

$$\tau_S \frac{d\vec{u}}{dt} = \vec{V} - \vec{u} + \vec{u}_p$$

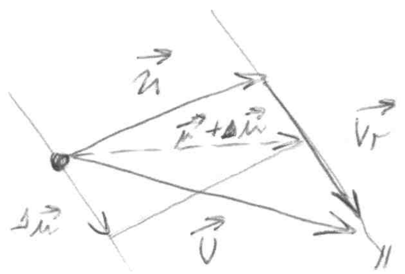
Numerické řešení trajektorie částice v případu a)

$$\tau_S \frac{d\vec{u}}{dt} = \vec{V} - \vec{u} \Rightarrow d\vec{u} = (\vec{V} - \vec{u})\frac{dt}{\tau_S}$$

$$\Delta\vec{u} = (\vec{V} - \vec{u})\frac{\Delta t}{\tau_S}$$

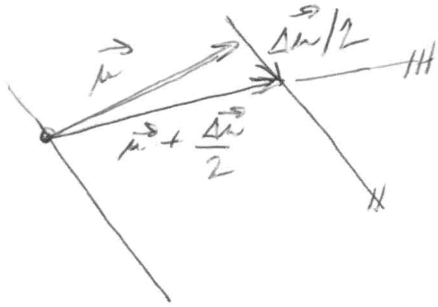
pro malé Δt ... $\vec{V}_r = \vec{V} - \vec{u} = konst$

změna rychlosti částice $\Delta\vec{u}$ během intervalu Δt má směr $\vec{V}_r$



$\vec{u}$ ... rychlost částice na začátku intervalu Δt

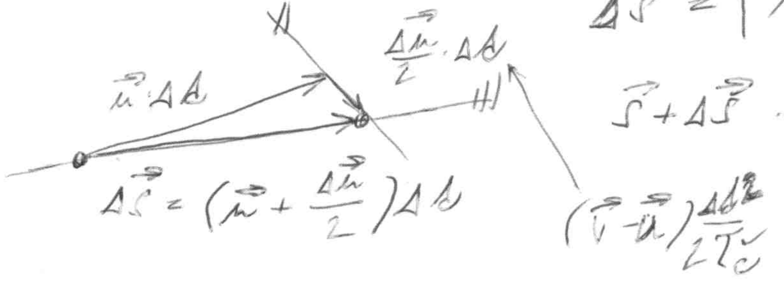
$\vec{u}+\Delta\vec{u}$ ... rychlost částice na konci intervalu Δt



$\vec{u} + \frac{\Delta\vec{u}}{2}$ ... stř. rychlost během Δt

$\Delta\vec{S} = \left(\vec{u} + \frac{\Delta\vec{u}}{2}\right)\Delta t$ ... posun částice za čas Δt

$\vec{S} + \Delta\vec{S}$ ... koncová poloha částice za čas Δt



nová poloha částice s jinou $\vec{v}$ a nově stanovenou $\vec{u}$, opakováním pro Δt → trajektorie částice

Podmínka zanedbání změny rozdílu rychlostí $(\vec{v}-\vec{u})$ během Δt. Splněno při $\frac{\Delta t}{\tau_s} \ll 1$

3.2.5 Kvazistacionární pohyb částice

Částice koná u odlučovacích ploch již téměř ustálený (kvazistacionární) pohyb

$|\vec{F}_1| \ll |\vec{F}_\tau|$, resp. $|\vec{F}_e|$

Pohybová rovnice $\quad 0 = \vec{F}_\tau + \vec{F}_e \quad$ $\vec{F}_v$ - zanedbána

$$0 = (\vec{v}-\vec{u}) + \vec{F}_e \cdot B$$

$$\vec{u}_r = \vec{F}_e \cdot B$$

$\vec{u}_r = \vec{u}-\vec{v} = -\vec{v}_r$ relativní rychlost částice vůči prostředí

U odlučovačů, kde $\vec{F}_e$ působí ⊥ na odlučovací plochu a proud u stěny proudí pouze podél stěny — $\vec{u}_r$ je přímo u_k (konečná odlučovací rychlost částice)

Kvazistacionární princip – metodický princip (ne odlučovací)

3.3 Kritéria podobnosti při pohybu částice

Uvažuje se upravená obecná pohybová rce

$$\tau_s \frac{d\vec{u}}{dt} = (\vec{v}-\vec{u})\left(1+ \tfrac{1}{6} Re_r^{2/3}\right) \underbrace{- \frac{\tau_s}{\rho_s} \vec{\nabla} p}_{-\frac{a^2}{18\eta} \vec{\nabla} p} + \vec{F}_e \cdot B$$

v gravitačním silovém poli : $\vec{F}_e = \vec{F}_g$, $\vec{\nabla} p = \rho \vec{g}$

úprava posledních 2 členů

$$\tau_\sigma \frac{d\vec{u}}{dt} = (\vec{v} - \vec{u})\left(1 + \frac{1}{6} Re_r^{2/3}\right) + \tau_\sigma \vec{g}\left(1 - \frac{\rho}{\rho_\sigma}\right)$$

$\Rightarrow$ kritéria rozhodující o pohybu částice : Re_r , ρ/ρ_σ

ale $Re_r = \dfrac{a|\vec{v}_r|}{\nu}$ se u případu obtékání překážky mění bod po bodu $\Rightarrow$ náhrada kritériem, které je konst. $Re_\sigma = \dfrac{a v}{\nu}$

Metodou integrálních analogů nebo převodem do bezrozměrného tvaru lze odvodit :

rozhodujícím kritériem je Stokesovo č. $Stk = \dfrac{\tau_\sigma \cdot v}{L}$

v gravitačním poli dále rozhoduje Froudeho číslo proudu $Fr = \dfrac{g \cdot L}{v^2}$

obecně u proudění Reynoldsovo č. proudu $Re = \dfrac{vL}{\nu}$